Mathematik Formelsammlung

Johannes@hubersoft.net

Für den ersten Test darf 1 Blatt verwendet werden,
für den zweiten Test 2 Blätter, für die Klausur 3 Blätter

(jeweils 4 dieser Seiten auf einem Blatt)

Stammfunktionen:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$
$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$
$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$
$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$
$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$
$$\int \sinh^2 x\,dx = \frac{1}{2}(-x + \sinh x \cosh x) + C = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sinh 2x + C$$
$$\int \cosh^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x + \sinh x \cosh x) + C = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sinh 2x + C$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C \quad \Big| \quad \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \quad \Big| \quad \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$$
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \quad \Big| \quad \int \tan x\,dx = -\ln\cos x$$
$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C = \underset{(\text{f. } |x|<1)}{\operatorname{artanh} x + C} = \underset{(\text{f. } |x|>1)}{\operatorname{arcoth} x + C}$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C = \operatorname{arsinh} x + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C = +\operatorname{arcosh} x + C & (\text{f. } x>1) \\ -\ln\left(-x + \sqrt{x^2-1}\right) + C = -\operatorname{arcosh}(-x) + C & (\text{f. } x<-1) \end{cases}$$
$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C \quad \Big| \quad \int \frac{dx}{(x-a)^3} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-a)^2} + C$$
$$\int \frac{dx}{(x-a)^2} = -\frac{1}{x-a} + C \quad \Big| \quad \int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} \quad (\text{f. } k>1)$$
$$\int \frac{x}{(x-a)^2}\,dx = \ln|x-a| - \frac{a}{x-a} + C$$
$$\int \frac{x}{(x-a)^3}\,dx = -\frac{1}{x-a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{(x-a)^2} + C$$
$$\int \frac{x^2}{(x-a)^3}\,dx = \ln|x-a| - \frac{2a}{x-a} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{(x-a)^2} + C$$

Differentiation:

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + v'\cdot u$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - v'\cdot u}{v^2}$$
$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$
$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Newton-Verfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Wichtige Ableitungen:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (\sin x)' = \cos x \qquad (\sinh x)' = \cosh x$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\cosh x)' = \sinh(x)\ (!)$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$
$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$$
$$(e^x)' = e^x \qquad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$
$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \qquad (\coth x)' = -\frac{1}{\sinh x} = 1 - \coth^2 x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad (\operatorname{arcoth} x)' = -\frac{1}{x^2-1}$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	1	∞	-1
$\cot x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$\sqrt{3}$	∞	1	0	-1

Additionstheoreme:

$$\sin(x+y) = \sin x\cdot\cos y + \sin y\cdot\cos x$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

area-Funktionen:

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \qquad \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$
$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \qquad \operatorname{arcosh} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \qquad \operatorname{artanh} x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$
$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} \qquad \operatorname{arcoth} x = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

Kreise:

- $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$
- $x = x_0 + r\cos\varphi$
  $y = y_0 + r\cdot\sin\varphi$

Ellipsen:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

a: Breite in x-Richt.
b: Breite in y-Richt.

$x = x_0 + a\cdot\cos\varphi \quad y = y_0 + b\cdot\sin\varphi$

Hyperbeln:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$
$x = x_0 \pm a\cdot\cosh t$
$y = y_0 + b\cdot\sinh t$
(zur x-Achse parallel)

$$\frac{-(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$
$x = x_0 + a\cdot\sinh t$
$y = y_0 \pm b\cdot\cosh t$
(zur y-Achse parallel

Asymptote (beide Fälle): $y = y_0 \pm \frac{b}{a}\cdot(x-x_0)$

Fehler:

ext.: $|\Delta f| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|\cdot|\Delta x_1| + \dots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|\cdot|\Delta x_n|$

pos.: $|\Delta f| \le \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2}\cdot\sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}$

Der ext. Fehler ist immer kleiner als der pos. Fehler!

Ebene Polarkoordinaten (r,φ):

$x = r\cdot\cos\varphi \ \big|\ y = r\cdot\sin\varphi$
$x^2 + y^2 = r^2$

Zylinderkoordinaten (r,φ,z):

$x = r\cdot\cos\varphi \ \big|\ z = z$
$y = r\cdot\sin\varphi \ \big|\ x^2 + y^2 = r^2$

Räuml. Polarkoord. (r,ϑ,φ):

$x = r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\vartheta$
$y = r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\vartheta$
$z = r\cdot\cos\vartheta$
$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Summen: (~Gauss)

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$$
$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$
$$\sum_{n=1}^{N} n^3 = \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2$$

Für $\sum_{n=1}^{N} n^4$ gibt es keine Formel!!!

Geometr. Summe:

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

Binom. Summe:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^k\cdot b^{n-k}$$
(a, b vertauschbar)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \sum_{n=0}^{N} A = (N+1)A$$

Grenzwerte:

① l'Hospitalsche Regel: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$

② Exponentialfunkt. schlägt Polynom, Polynom schlägt log.
($x^2\cdot e^{-x} \to 0$ f. $x\to\infty$) ($x\cdot\ln x \to 0$ f. $x\to 0$)

③ Durch höchste Potenz teilen $\lim \frac{x}{x+\sin x} = \lim \frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}}$

④ Trigonometr. Fkt. umformen $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Wichtige Potenzreihen:

geo: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

geo: $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

exp: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

sin: $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

cos: $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

log: $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$

bin: $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = 1 + ax + \binom{a}{2} x^2 + \dots$

Taylor:

eine Variable: $T_N^{(x)} = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$

zwei Variablen: $T(x,y) = \sum_{k,m=0}^{k+m=N} \frac{D_x^k D_y^m f(x_0, y_0)}{k! \cdot m!} \cdot (x-x_0)^k (y-y_0)^m$

Konvergenzradius r:

$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad r = \frac{1}{L}$

Fourier-Reihe:

$\boxed{w = \frac{2\pi}{T}}$

$T = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cdot \cos(nwt) + b_n \cdot \sin(nwt) \right)$

gerade: $b_n = 0 \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot \cos(nwt)\, dt$

ungerade: $a_n = 0 \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot \sin(nwt)\, dt$

$\binom{a}{n} := \frac{a(a-1) \cdots (a-n+1)}{n!} \qquad \binom{a}{0} = 1$

$\cos(n \cdot \pi) = (-1)^n$

$\cos\left(\frac{n}{2}\pi\right) = \begin{cases} (-1)^k & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$

$\sin\left(\frac{n}{2}\pi\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ (-1)^k & n \text{ ungerade} \end{cases}$

$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$

$\lambda_{1/2} = \alpha \pm i \cdot \beta$

$y(x) = e^{\alpha x}\left((b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots b_{k-1} x^{k-1}) \cos \beta x + (c_0 + c_1 x + \dots + c_{k-1} x^{k-1}) \sin \beta x \right)$

Störfunktion: y-freier Term, auf die rechte Seite gebracht

Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Dgl = alle Lsgn der homogenen Dgl + Partikulärlösung des inhomogenen Teils

Störgliedansatz:

Störfunktion	einfacher Störglied-ansatz (Nicht-Resonanzfall)	erweiterter Störglied-ansatz
Konstante $-7e^{\alpha x}$ $(1-x^3)e^{\alpha x}$ $(\text{Pol. Gr. 3}) \cdot e^{\alpha x}$	A (geeignet Konst.) $A e^{\alpha x}$ (A geeignet $(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3) e^{\alpha x}$	$\tilde{\lambda} = \alpha$
$\cos \beta x$ $-7 \beta x$	$A \cdot \cos \beta x + B \cdot \sin \beta x$	$\tilde{\lambda} = \pm \beta i$
$(\text{Pol. Gr. 3}) \cdot \cos \beta x$ $x \cdot \cos \beta x -$ $-(\text{Pol. Gr. 3}) \cdot \sin \beta x$	$(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3) \cdot \cos \beta x$ $+ (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3) \cdot \sin \beta x$	
$e^{\alpha x}(\text{Pol. Gr. 3})$ $\cdot \cos \beta x + (\text{Pol. Gr. 3})$ $\cdot \sin \beta x$	$e^{\alpha x}[A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3]$ $\cdot \cos \beta x + [B_0 + B_1 x + B_2 x^2 +$ $+ B_3 x^3] \cdot \sin \beta x$	$\tilde{\lambda} = \alpha \pm i\beta$
Summe von Störfunktionen dieser Art	Summe der entsprechenden Ansätze	

Komplexe Zahlen:

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$z = x + i \cdot y = r \cdot \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$

$z^* = x - i \cdot y$ (konjugiert-komplexe

$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$

$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \cdot \sin \varphi$

$\cos \varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$

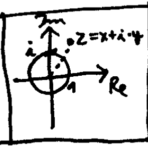
$\sin \varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$

Der Nenner eines Bruchs wird reell, wenn man den Bruch mit der konjugiert-komplexen erweitert!

Alle n-ten Wurzeln berechnen:

$W_{k+1} = W_k \cdot e^{\frac{i \cdot 2\pi}{n}}$

(weiterdrehen, Multipl. mit $e^{\frac{i 2\pi}{n}}$



$z \cdot z^* = |z|^2$!!!

$\frac{1}{i} = -i \qquad i^2 = -1$

$(z \cdot w)^* = z^* \cdot w^*$

$\left(\frac{z}{w}\right)^* = \frac{z^*}{w^*}$

$\varphi = \arg(z)$

Partielle Integration:

$u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$

$u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$

Integration durch Umformung des Integranden:

$\sin^2 + \cos^2 = 1$

$e^{iax} = \cos ax + i \sin ax$

Integration durch Substitution:

$\to u = g(x)$ → Integrieren

$\to \frac{du}{dx} = g'(x)$ → Rücksubst.

Partialbruchzerlegung:

- Nennergrad muss größer als Zählergrad sein
- Nur Produkte aufspaltbar, eventuell erst Pol. Div!
- $\frac{A}{\dots} + \frac{B}{\dots} + \frac{C}{\dots} \Rightarrow$ auf gem. Nenner bringen

  (!! 2-fache NS: $\frac{A + B \cdot x}{(x-a)^2}$, 3-fache NS: $\frac{A + Bx + Cx^2}{(x-a)^3}$)
- Koeffizienten vergleichen (dazu $x, x^2, x^3, \dots$ auskl.)
- Entstehende Gleichungen f. A, B, C… lösen, A, B, C einsetzen

Elementare Folgen:

$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$

$e = 2{,}718281828$

Konvergenzkriterien:

a) Majoranten: $b_n < a_n$ und $b_n \to \infty$

$\Rightarrow$ dann $a_n \to \infty$

b) Quotienten/Wurzel: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$

$\sqrt[n]{|a_n|} < 1$

$\Rightarrow a_n$ ist eine Nullfolge

c) Cauchy: $\lim_{n\to\infty} \left| \sum_{n=N}^{N+K} a_n \right| = 0$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$

$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Ellipsoid-Koordinaten:

$x = at \cdot \cos \varphi \cdot \sin \vartheta$

$y = bt \cdot \sin \varphi \cdot \sin \vartheta$

$z = ct \cdot \cos \vartheta$

$\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = t^2 \right.$

(t, ϑ, φ)

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$!! $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$!!

$\sinh(x+y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y$

$\cosh(x+y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y$

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

Winkel von 2 Vektoren:

$$\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}=\cos\varphi$$

$\vec{x}\cdot\vec{y}=0 \Rightarrow$ Vektoren sind orthogonal

Norm = Betrag = Länge

Vektorprodukt:

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2\\a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3\\a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1\end{pmatrix}$$

= Vektor, der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht. Die Länge des Vektors = Flächeninhalt des Parallelogr.

$$\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\left|\begin{matrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{matrix}\right|\begin{matrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\\a_3&b_3\end{matrix}$$

= Volumen des Parallelflachs

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

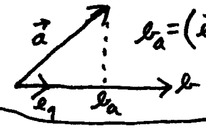
Prüfen, ob Vektoren l. u.

$$\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\cdot x_1+\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\cdot x_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

nur triviale Lsg $\Rightarrow$ l. u.
(Matrix erstellen!!)

Orthogonale Projektion:

$\vec{a}$ auf $\vec{b}$ projezieren:



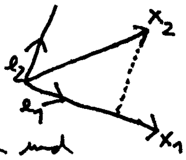
$x\perp y \Leftrightarrow \langle x|y\rangle=0$

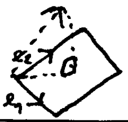
Geraden im $\mathbb{R}^3$:

$$g:\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$$

Orthonormalbasis nach Gram-Schmidt:

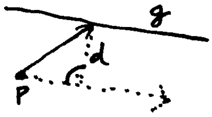
1. x_1 normieren $=e_1$
2. x_2 auf e_1 projezieren und senkrechten Vektor normieren $=e_2$
3. x_3 auf e_1 und e_2 projezieren, addieren und (oder x_1 u. x_2) senkrechten Vektor normieren





Abstand Gerade/Punkt:

projezieren:



$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A}=0$!!

Ebenen: (Vektor in Koord. Darst.)

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix}x&1&2\\y&-1&0\\z&0&1\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}1&1&2\\2&-1&0\\3&0&1\end{matrix}\right|$$

+ ausrechnen

Laplace'scher Deltaoperator:

$$\Delta=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}=\vec{\nabla}^2$$

Wegunabhängigkeit bei Wegintegralen:

$$\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\Phi(\vec{r}_e)-\Phi(\vec{r}_a)$$ Kurve in Stammfunktion einsetzen

Länge eines Kurvenbogens:

$$s=\int_C ds=\int_a^b\|\vec{r}\,'\|\,dt$$

Gradient:

$$\operatorname{grad}\Phi=\vec{\nabla}\cdot\Phi=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\right)$$

$\Rightarrow$ gibt ein Vektorfeld (Φ ist ein Skalarfeld)

Richtungsableitung von Skalarfeldern:

$$\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial\vec{b}}=\operatorname{grad}f(\vec{a})\cdot\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

(Ableitung von $f(\vec{a})$ an der Stelle $\vec{a}$ in Richtung von $\vec{b}$)

Lösen von exakten Dgls:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=P\qquad\frac{\partial\Phi}{\partial y}=Q$$

- P und Q getrennt integrieren
- Scharfer Blick: Stammfkt. addieren, alles Doppelte weglassen
- $\Phi(x,y)=C$ setzen und nach y auflösen

Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{F}$:

$$\operatorname{div}\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$ = Skalar-Produkt von Nabla und $\vec{F}$

$\Rightarrow$ gibt ein Skalarfeld

Exakte Dgl.

$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$

wenn $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ erfüllt ist

Rotation eines 3-dim(!) Vektorfeldes $\vec{F}$:

$\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}$ (Vektorprodukt von Nabla u. $\vec{F}$)

$\Rightarrow$ gibt ein Vektorfeld

$\vec{F}$ ist rotationsfrei, wenn $\operatorname{rot}\vec{F}=0$ ist.
$\Rightarrow$ es existiert eine Stammfunktion

Prüfen auf Rotationsfreiheit: Alle Kombinationen eines Vektors entgegengesetzt ableiten.

Bestimmung einer Stammfunktion:

- alle Komponenten eines Vektorfeldes einzeln integrieren (nach x,y,z)
- Schreibweise: $\frac{\partial\Phi}{\partial x}=F_1$

  $\Phi=\int F_1\,dx+C(y,z)$

  $\vdots$
- alle Stammfunktionen addieren und Doppeltes weglassen (scharfer Blick

Exakt-Machen für nicht-exakte Dgls (Integr. Faktor finden)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Integrierender Faktor }\mu(x,y)\text{:}\\ \mu(x,y)\cdot P(x,y)\,dx+\mu(x,y)\cdot Q(x,y)\,dy=0\end{array}}$$

z.B. $P=y-y^2$
$Q=x$

Ansatz:

- $\mu(x,y)=f(x)\cdot g(y)$
- $\frac{\partial}{\partial y}\big(\underbrace{f(x)}_{\text{konst, weil nach }y}\cdot g(y)\cdot P\big)=\frac{\partial}{\partial x}\big(f(x)\cdot\underbrace{g(y)}_{\text{konst, weil nach }x}\cdot Q\big)$ (f und g einsetzen und auf Exaktheit prüfen)
- $\frac{g'(y)}{g(y)}\cdot P(x,y)+\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\overset{!}{=}\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot Q(x,y)+\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ (gleich diesen Ansatz verwenden)
- Beide Seiten $=0$ setzen $\Rightarrow$ gibt 2 Gleichungen $\Rightarrow$ integrieren mit ln (vorher P und P' einsetzen)
- Ergibt $g(y)$ und $f(x)$ $\Rightarrow$ Einsetzen als μ $\Rightarrow$ fertig!

Lösen einer Dgl nach dem Störgliedansatz:

① Dgl $y'' + 2y' + y = e^x$

② Charakteristisches Polynom vom homogenen Teil aufstellen: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

③ Nullstellen vom charakterist. Polynom ausrechnen, z.B. Raten, Polynomdivision
z.B. $\lambda_{0/1} = -1$ (2-fach)

④ für jede Nullstelle eine Lösung aufstellen
(für mehrfache NS auch nur eine)
(nach bekannter Formel auf Blatt 2)

⑤ alle Lösungen <u>addieren</u>
⇒ ergibt allgemeine Lsg. der homogenen Dgl.

⑥ Störgliedansatz aufstellen, bei Resonanz
(NS vom Störglied = NS vom charakt. Pol.)
x^k für k-fache NS davorschieben
Störgliedansatz = eigene Funktion $y_S(x) = A + Bx + \ldots$

⑦ Störgliedansatz einsetzen (dazu mehrmals ableiten)

⑧ Koeffizienten links und rechts vergleichen, Gleichungen für A, B, C aufstellen + ausrechnen.

⑨ A, B, C in Störglied einsetzen ⇒ spezielle Partikulärlösung

⑩ Partikulärlösung zur Lösung der homogenen Dgl addieren ⇒ ergibt alle Lösungen für die inhomogene Dgl

$$\boxed{\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta}$$

$$y(x) = e^{\alpha x}\left((b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{k-1} x^{k-1}) \cos\beta x + (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{k-1} x^{k-1}) \sin\beta x\right)$$

Lösen einer Dgl mit Reduktion der Ordnung:

① Dgl. $xy' + 3y = 5x^3$

② Lösen des homogenen Teils, z.B. durch Trennung der Variablen

③ Neue Funktion $y = C(x) \cdot$ [Lösung des homogenen Teils ohne Konst.]
$$y = C(x) \cdot \frac{1}{x^3}$$

④ Neue Funktion in die inhomogene Dgl einsetzen (dazu auch ableiten), ausrechnen nach Produktregel, ⇒ C-Glieder fallen raus, C' nicht

⑤ Wenn nur C' drin ist, dann integrieren, wenn C'' drin ist, C' durch u ersetzen.

⑥ Integrieren, u durch C' zurücksubst., nochmal integrieren
⇒ Möglicherweise auch gleich am Anfang y' mit u substituieren.

<u>Höhenlinien:</u> z konst. setzen, nach y auflösen

<u>Fourier-Transformation:</u>

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t}$$

Hermitesch: $A^+ = A$

- Diagonale muss reell sein
- Der Rest muss spiegelbar sein, wenn komplexe Zahlen vorhanden, konjugiert komplex

Schiefhermitesch: $A^+ = -A$

- Diagonale muss rein imaginär sein
- Der Rest muss spiegelbar, konj. komplex und VZ umgedreht sein

Unitär: $AA^+ = I$

- Spalten müssen paarweise orthogonal sein
- Determinante muss $= 1$ sein

Normal: $AA^+ = A^+A$

- Hermitesch, schiefhermitesch, oder unitär

Regulär:

- Rang = Größe
  → alle Zeilen l.u.
- muss quadratisch sein

Invertierbar:

- Es existiert eine Inverse A^{-1}
  $AA^{-1} = I$
- genau dann invertierbar, wenn regulär

Symmetrisch: $A^t = A$

Schiefsymmetrisch: $A^t = -A$

orthogonal: $A^tA = I$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \\ - & - & - & & \end{array}$$

Gauss:

- Det wechselt VZ, wenn man Zeilen vertauscht
- Det = Produkt der Diagonal-Elemente bei Dreiecksmatrix

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

A^t Transponierte
→ Zeilen/Spalten vertauscht

A^* konjugiert komplex
→ VZ der is geändert

A^+ Adjungierte
→ Zeilen/Spalten vertauscht, VZ bei is geändert

Inverse einer 2-2-Matrix:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Drehung in der Ebene:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

α = Drehwinkel

Drehmatrix?

→ Wenn sie eine orthogonal-Matrix ist und $\det = 1$

Drehwinkel? (α)

→ Jede Drehmatrix hat die Spur
$\operatorname{trace} A = 1 + 2\cos\alpha$

Drehachse? $\cancel{\mathcal{G}}$

$\sin\alpha\,\Omega = \frac{1}{2}\left(A_{g\alpha} - A^t_{g\alpha}\right)$

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

$\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Wenn $\det A = 0$:
- A ist nicht regulär
- Zeilen/Spalten l.a.

Verfahren zur Determinantenberechnung:

① Gauss-Verfahren: auf Dreiecksmatrix bringen, dann Diagonale multiplizieren

② Bei vielen Nullen:
→ aufteilen
→ det multiplizieren

$$\begin{array}{cc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 8 & 1 & 9 & 3 \\ 6 & 3 & 0 & 3 & 6 \\ 7 & -5 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

③ Laplace-Verfahren

$$\begin{array}{ccccc} - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Nach Zeile entwickeln!
→ Immer Faktor mal Rest-Det, aktuelle Zeile auslassen!

Nützliche Integrale:

$\int \cos x \cdot \sin^3 x \, dx = \frac{1}{4} \sin^4 x$

$\int \sin x \cdot \cos^3 x \, dx = -\frac{1}{4} \cos^4 x$

$\int \cos x \cdot \sin x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x$

$\int \sin^2\varphi \, d\varphi = -\frac{1}{2}\cos\varphi \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2}\varphi$

$\int \sin^3\varphi \, d\varphi = -\frac{1}{3}\sin^2\varphi \cos\varphi - \frac{2}{3}\cos\varphi$

$\int \cos^3\varphi \, d\varphi = \frac{1}{3}\cos^2\varphi \sin\varphi + \frac{2}{3}\sin\varphi$

$\int \sin^4\varphi \, d\varphi = -\frac{1}{4}\sin^3\varphi\cos\varphi - \frac{3}{8}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{3}{8}\varphi$

$\int \cos^4\varphi \, d\varphi = \frac{1}{4}\cos^3\varphi \sin\varphi + \frac{3}{8}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{3}{8}\varphi$

Spur = trace = Summe der Hauptdiagonalelemente

A und B sind vertauschbar, wenn $AB - BA = 0$

Rang = Anzahl l.u. Zeilen/Spalten

Spaltenrang = Zeilenrang

Rang = Dimension des Bildraums

Defekt = Dimension des Nullraums

3-dim-Drehmatrix erstellen:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

n = normierter Einheitsvektor der Drehgerade

$$A_{g\alpha} = I + (\sin\alpha)\,\Omega + (1-\cos\alpha)\,\Omega^2$$

Projektion auf Gerade:

$P_G = \vec{e}_1 \vec{e}_1^{\,t}$ $\qquad \vec{e}_1$ = normierter Geradenvektor

Projektion auf Ebene:

$\vec{n}$ = normierter Normalenvektor der Ebene

$$P_n = \vec{n}\,\vec{n}^{\,t} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} (n_1 \; n_2 \; n_3)$$

Projektion: $P_E = I - P_n = \vec{e}_1 \vec{e}_1^{\,t} + \vec{e}_2 \vec{e}_2^{\,t}$

1. Vektor, 2. Vektor

Spiegelung: $S_E = I - 2P_n$

Weitere Drehmatrizen: (in R^3)

um die $\vec{e}_1$-Achse:

$$A_{1\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

um die $\vec{e}_2$-Achse:

$$A_{2\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

um die $\vec{e}_3$-Achse:

$$A_{3\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\int \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\cos\varphi \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2}\varphi$

Eigenwerte berechnen:

$$\begin{pmatrix} (2-\lambda) & 2 & 0 \\ 3 & (9-\lambda) & 1 \\ 7 & 2 & (4-\lambda) \end{pmatrix}$$

- Von Diagonale λ abziehen
- Det ausrechnen
- $= 0$ setzen

$\Rightarrow$ Lösungen = Eigenwerte

Eigenräume berechnen:

- Eigenwerte berechnen
- in λ-Matrix (s.o.) einsetzen
- Jede Matrix diagonalisieren
  - $\Rightarrow$ min. 1 Zeile fällt weg; für doppelten EW fallen zwei Zeilen weg usw.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$ Eigenvektor

- Links möglichst große Einheitsmatrix, rechts stehen die Eigenvektoren

EW k-fach entartet:

$\to$ geometrische Vielfachheit k

$\to$ Dimension k des Eigenraums

Diagonalmatrix:

① Eigenvektoren von A ausrechnen

② Eigenvektoren nebeneinanderschreiben:

$$T = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ gibt Matrix T

(Reihenfolge der EV spielt keine Rolle, auch nicht normieren!)

③ T^{-1} ausrechnen z.B. mit Gauss-Verfahren

$$\boxed{\text{Diagonalisierte Matrix} = T^{-1}AT}$$

Richtungsableitung:

Ableitung an Stelle $\vec{a}$ in Richtung v. $\vec{b}$

$$\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial \vec{b}} = \operatorname{grad} f(\vec{a}) \cdot \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

Spektraldarstellung:

von Matrix A.

- Eigenwerte von A berechnen
- Passende Eigenvektoren berechnen
- Projektionsmatrizen für Eigenräume berechnen (= EV mit sich selbst multiplizieren)

Wichtig:

$\to$ Bei 1-dim. Eigenräumen Projektion auf Gerade

$\to$ Bei 2-dim. Eigenräumen (bei doppelten EW!) Projektion auf Ebene

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\lambda_j}_{\text{EW}} \underbrace{\hat{P}_j}_{\text{Proj. auf ER}}$$

$$\varphi = \lambda_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1^{\,*} + \lambda_2 \vec{e}_2 \vec{e}_2^{\,*} + \lambda_3 \vec{e}_3 \vec{e}_3^{\,*}$$
(bei nur 1-dim ER)

$$\varphi = \lambda_{1,2}(\vec{e}_1 \vec{e}_1^{\,*} + \vec{e}_2 \vec{e}_2^{\,*}) + \lambda_3 \vec{e}_3 \vec{e}_3^{\,*}$$
(bei einem 2-dim. ER)

Wichtig: Projektionen normieren!

z.B. $$\varphi = \underbrace{2}_{\text{EW}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{Projekt. auf ER}} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Die Matrix e^{At} (3 Möglichkeiten):

① mit der Spektraldarstellung:

$$A = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \hat{P}_j \Rightarrow e^{At} = \sum_{j=1}^{m} e^{\lambda_j t} \hat{P}_j$$

z.B. $$\varphi = 3\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + e^{5t}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

② mit der Exponentialreihe:

- Bildungsgesetz für A^k finden
- e^{At} hinschreiben:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

③ mit einem Ansatz:

$$\boxed{e^{At} = a_0 \cdot I + a_1 \cdot A + a_2 \cdot A^2 + \ldots + a_{n-1} A^{n-1}}$$

$e^{xt} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ (normal) $\leftarrow$ für einfache EW

$t\, e^{xt} = a_1 + a_2 x$ (Ableitung) $\leftarrow$ für doppelte EW zusätzlich verwenden

$\to$ Erst alle nötigen A^k ausrechnen

$\to$ Faktoren $a_0, a_1, a_2 \ldots$ ausrechnen und dazuschreiben $\hookrightarrow$ mit Gauss als Matrix

Substitutionsregel für Bereichsintegrale:

Ebene Polarkoordinaten:

$x = r \cdot \cos\varphi$

$y = r \cdot \sin\varphi$

$dF = dx \cdot dy = r \cdot dr \cdot d\varphi$

Ebene Ellipsoidkoordinaten:

$x = a t \cos\varphi$

$y = b t \sin\varphi$

$dF = dx \cdot dy = abt \cdot dt \cdot d\varphi$

Räumliche Polarkoordinaten:

$x = r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\vartheta$

$y = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta$

$z = r \cdot \cos\vartheta$

$dV = dx\,dy\,dz = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\varphi\, d\vartheta$

Räumliche Ellipsoidkoordinaten:

$x = a t \cos\varphi \sin\vartheta$

$y = b t \sin\varphi \sin\vartheta$

$z = c t \cos\vartheta$

$dV = dx\,dy\,dz = abc\, t^2 \sin\vartheta\, dt\, d\varphi\, d\vartheta$

Räumliche Zylinderkoordinaten:

$x = r \cos\varphi$

$y = r \sin\varphi$

$z = z$

$dV = dx\,dy\,dz = r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$

Homogene Dgl. Systeme:

① Dgl als Matrix schreiben

$$\begin{matrix} \dot{x} = 7x + 4y \\ \dot{y} = -4x + y \end{matrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

② e^{At} berechnen

③ Lösung hinschreiben:

$$\vec{r}(t) = e^{At} \cdot \vec{c}$$

Dgl. Systeme wenn A diagonalisierbar:

① alle EW berechnen

② alle EV berechnen

③ Lösung hinschreiben:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma_1 e^{\lambda_1 t} \vec{c}_1 + \gamma_2 e^{\lambda_2 t} \vec{c}_2 + \gamma_3 e^{\lambda_3 t} \vec{c}_3$$

c_n = Eigenvektor Nr. n

λ_n = Eigenwert Nr. n

γ_n = Beliebige Konst.

Lineares Gleichungssystem mit Vektor lösen:

① Hinschreiben: $\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right)$

② Mit Gauss-Verfahren eliminieren, aber keine Zeile streichen, sondern nur mit Addition/Subtraktion unterste Zeile = 0 bringen

! rechts, im Lösungsvektor steht dann ~~nicht~~ 0 in der untersten Zeile!

(Gauss vom rechten Vektor unabhängig!)

③ auf diese Form bringen:

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & x & \bullet \\ 0 & 1 & x & \bullet \\ 0 & 0 & x & \bullet \end{array}\right)$$

-1 — Lösungsvektor

wichtig: Den Rest der Diagonale mit -1 auffüllen!!

④ Nullraum ablesen + hinschreiben

Bildraum = zwei beliebige l. u. Spalten der Ausgangsmatrix

- Nullraum immer orthogonal zum Bildraum!
- Wenn im Lösungsvektor noch Parameter drin sind (z.B. λ), Lösungsvektor in eine beliebige Zeile der Ausgangsmatrix einsetzen und λ ausrechnen!

Lösung: (allgemeine Lsg)

$$\text{Lösungsvektor} + r \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}}_{\text{Nullraum}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}}_{\text{Nullraum}}$$

Wegintegrale:

Wegintegrale 1. Art:

Standardformel:

$$s = \int_C ds = \int_a^b \| \vec{r}\,'(t) \| \, dt \quad (\text{Bogenlänge})$$

① Kurve mit neuen Koordinaten beschreiben
② Kurve in Vektor umwandeln
③ Vektor ableiten, Länge berechnen
④ Einsetzen, Integral ausrechnen (mit Grenzen)

$$I = \int_C f(\vec{r}) \cdot \| \vec{r}\,'(t) \| \, dt \quad (\text{aufgepropfte Funktion})$$

da die jeweilige Komponente des Vektors $\vec{r}$ (= Kurvenvektor) einsetzen $x = r_1$, $y = r_2$, $\vdots$

Wegintegrale 2. Art:

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$I = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

das da substituieren

da Kurve einsetzen $\rightarrow$ Kurve: $\vec{r} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ oder φ

$x = t$
$y = t^2$

$\frac{dx}{dt} = 1$
$\frac{dy}{dt} = 2t$

Bereichsintegrale:

substituieren, je nach Koordinaten (cos Seite)

$$I = \iint_B f(x,y) \, dF$$

da einsetzen

① Kurve in geeigneten Koordinaten beschreiben:

z.B. $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$

② neue Grenzen überlegen

$$I = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{1} r \cdot dr \cdot d\varphi$$

③ Vereinfachen (eventuell aufspalten) und Integral ausrechnen

Schwerpunkt:

x-Schwerpunkt: $x_S = \frac{1}{V} \iiint x \, dV$ ← x dazuschreiben

normales V ohne x

① normales Integral ausrechnen
② x dazuschreiben und nochmal ausrechnen
③ durch normales V teilen (y/z-Schwerpunkt genauso!)

Dgl-Systeme 2. Ordnung: $\ddot{\vec{r}} = A\vec{r}$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \vec{r} = \left(\gamma_1 e^{2t} + \gamma_2 e^{-2t}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{1.\,\text{EV}} + \left(\gamma_3 e^{i\sqrt{2}t} + \gamma_4 e^{-i\sqrt{2}t}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{2.\,\text{EV}}$$

$\pm\sqrt{1\,\text{EW}}$, $\pm\sqrt{2\,\text{EW}}$

① alle Eigenwerte berechnen + Wurzeln daraus
② zugehörige Eigenvektoren berechnen
③ Lösung hinschreiben

Taylor-Reihen:

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt[5]{x^2-y}}=(x^2-y)^{-\frac{1}{5}}$$

bei $(0|-1)$: Pol. Grad 2:

$$=(x^2-(y+1)+1)^{-\frac{1}{5}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{5}}{n}(x^2-(y+1))^n$$

$$=1-\frac{1}{5}(x^2-(y+1))+\binom{-\frac{1}{5}}{2}(x^2-(y+1))^2$$

$$\binom{-\frac{1}{5}}{2}=\frac{-\frac{1}{5}\,(-\frac{1}{5}-1)}{2}=\frac{3}{25}$$

$$\approx 1-\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5}(y+1)+\frac{3}{25}(x^4-2x^2(y+1)+(y+1)^2)$$

$$\approx 1-\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5}(y+1)+\cancel{\frac{3}{25}x^4-\frac{6}{25}x^2(y+1)}+\frac{3}{25}(y+1)^2$$

$$\approx 1-\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5}(y+1)+\frac{3}{25}(y+1)^2$$

Determinanten:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & x & (n-2) & 0 \\ 0 & 0 & (n-2) & x & (n-1) \\ 0 & 0 & 0 & (n-1) & x \end{vmatrix}$$

für $n=5$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & x & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & x & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{vmatrix}$$ Diagonale immer positiv!

$$\boxed{=-(n-1)^2D_{n-2}+x\cdot D_{n-1}} \quad \boxed{n>2}$$

$D_1=x$

$D_2=x^2-1$

$D_3=-4D_1+xD_2=-4x+x(x^2-1)$

speziell $x=0$

$D_n=-(n-1)^2D_{n-2}$

$\frac{D_n}{D_{n-2}}=-(n-1)^2$ | $n=2k$ setzen

$\frac{D_{2k}}{D_{2k-1}}=-(2k-1)^2$ | 2 dasselbe

$\frac{D_{2k+1}}{D_{2k}}=-(2k+1)^2$

Komplexe Wurzeln:

$z=x+iy$

$z=r\cdot e^{i\varphi}$

$x=r\cdot\cos\varphi$

$y=r\cdot\sin\varphi$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

z.B. $\sqrt[8]{-i}$:

① Radius berechnen:

$r=1$

② φ berechnen:

$\frac{y}{r}=-1=\sin\varphi$

$\varphi=\frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow \sqrt[8]{-i}=(1\cdot e^{\frac{3}{2}\pi i})^{\frac{1}{8}}=e^{\frac{3}{16}\pi i}$

$w_1=w_0\cdot e^{\frac{2\pi}{8}i}=e^{i(\frac{2}{8}\pi+\frac{3}{16}\pi)}$

$w_1=e^{\frac{7}{16}\pi i}$

$w_2=e^{\frac{11}{16}\pi i}$ $\quad w_3=e^{\frac{15}{16}\pi i}$

$w_4=e^{\frac{19}{16}\pi i}$

$\vdots$

z.B.:

$\lambda^3+i=0$

$\lambda=\sqrt[3]{-i}$

$r=1$

$\sin\varphi=-1\Rightarrow\varphi=\frac{3}{2}\pi$

$\sqrt[3]{-i}=(1\cdot e^{i\frac{3}{2}\pi})^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{\pi}{2}i}=w_0$

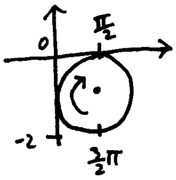
$w_1=e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3})}=e^{\frac{7}{6}\pi i}$

$w_2=e^{i(\frac{7}{6}\pi+\frac{2\pi}{3})}=e^{\frac{11}{6}\pi i}$

Wegintegrale:

$$I=\int_C xy\,dx-y\,dy$$

C = linker Halbkreis um $(1|-1)$ vom Radius 1 von $(1|-2)$ bis $(1|0)$



$x=1+\cos\varphi$

$y=-1+\sin\varphi$

$\frac{dx}{d\varphi}=-\sin\varphi$

$\frac{dy}{d\varphi}=\cos\varphi$

$$\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left((1+\cos\varphi)(-1+\sin\varphi)(-\sin\varphi)-(-1+\sin\varphi)\cos\varphi\right)d\varphi$$

$$=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi-\sin^2\varphi+\sin\varphi\cos\varphi-\sin^2\varphi\cos\varphi+\cos\varphi-\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$$

$$=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi+\cos\varphi-\sin^2\varphi-\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi$$

$$\left[-\cos\varphi+\sin\varphi-\frac{1}{2}(\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}$$

Dgl mit Variation der Konstanten:

$$x^4+y'x-y=0$$

hom. Dgl:

$y'x-y=0$

$\frac{dy}{dx}x=y$

$\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{1}{y}dy$

$\ln x+C_0=\ln y$

$y=x\cdot C$

Variation:

$y=x\cdot c(x)$

$y'=c(x)+c'(x)\cdot x$

in inhomogene Dgl einsetzen:

$x^4+\cancel{c(x)\cdot x}+c'(x)\cdot x^2-\cancel{x\cdot c(x)}=0$

$x^4+c'(x)\cdot x^2=0$

$c'(x)=\frac{x^4}{x^2}=-x^2$

$c(x)=-\frac{1}{3}x^3+C$ in Ansatz einsetzen

$y_{allg}=x\left(-\frac{1}{3}x^3+C\right)=-\frac{1}{3}x^4+Cx$

L'Hospital:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\quad \text{Typ}\left(\frac{0}{0}\right)\to\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}\to\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

Skalarprodukt in $\mathbb{C}^2$:

$$\binom{i}{3i}\cdot\binom{5i}{2}=-i\cdot5i-3i\cdot2$$

konj. komplex machen!

z.B. $\vec{a}=\binom{i}{3i}$

$\vec{b}$ sei orthogonal zu $\vec{a}$.

$\binom{i}{3i}\cdot\binom{x}{y}=-ix-3iy=-i(x+3y)=0$

$\Rightarrow x=-3y\Rightarrow b_0=\binom{-3}{1}\Rightarrow b=\frac{1}{\sqrt{10}}\binom{-3}{1}$

Betrag in $\mathbb{C}$:

$\left\|\binom{i}{3i}\right\|=\sqrt{|i|^2+9}=\sqrt{10}$

$\left\|\begin{pmatrix}3i-2\\1+5i\\3i\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{9+4+1+25+9}$

$\left\|\frac{e^i}{i}\right\|=\frac{|e^i|}{|i|}=\frac{1}{1}=1$

$|B\cdot e^{497i\pi}|=B$

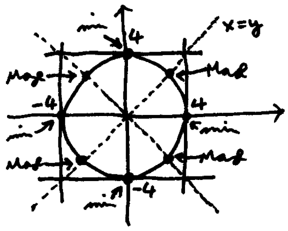
Extrema mit Nebenbedingung

$$H(x,y) = (y^2-16)(x^2-16)$$

Extrema über dem Kreis um 0 vom Radius 4.

H = 0:

$y^2 = 16 \quad x^2 = 16 \qquad y = \pm 4 \quad x = \pm 4$



alles pos. außer Rand = 0

$$x^2+y^2=16$$

Minima bei $(x,y) = \pm(4,0)$
$\pm(0,4)$

Maxima bei $(x,y) = (\pm 2\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2})$

Rechnung:

$$H(x,y) = (y^2-16)(x^2-16)$$
$$\phi(x,y) = x^2+y^2 = 16$$

① $\dfrac{\partial H}{\partial x} + \lambda \cdot \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 0 = 2x(y^2-16) + 2x\cdot\lambda$
$= 2x(y^2-16+\lambda)$

② $\dfrac{\partial H}{\partial y} + \lambda \cdot \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 0 = 2y(x^2-16) + 2y\cdot\lambda$
$= 2y(x^2-16+\lambda)$

③ $x^2+y^2 = 16$

(1) $x = 0$ oder $x \neq 0$ d.h. $\lambda = 16-y^2$

$\downarrow^{(3)}$ $y^2 = 16 \rightarrow y = \pm 4 \rightsquigarrow (0, \pm 4)$

(2) $y = 0$ oder $y \neq 0$ d.h. $\lambda = 16 - x^2$

$\downarrow^{(3)}$ $x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4 \rightsquigarrow (\pm 4, 0)$

wenn $x \neq 0$ und $y \neq 0$: $x^2 = y^2$

d.h. $y = \pm x$

$\xrightarrow{(3)} x^2 + x^2 = 16 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$
$y = \pm 2\sqrt{2}$

Sonstiges:

$$V_{Kegel} = \frac{1}{3} G h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\log_B A = y \Rightarrow B^y = A$$

$$\int f'(x)\cdot f^2(x) = \frac{1}{3} f^3(x)$$

$\int \sqrt{1+4x^2}$ $\hookrightarrow 2x = \sinh(u)$
$= \frac{1}{2}\,\mathrm{arsinh}\, 2x + \frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + C$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Wichtiges für Summen:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$e^{\pm i\pi} = -1$$

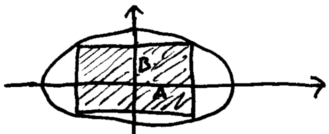
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

$$\int \sin e \cos e = \frac{1}{2}\sin^2 e$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Red. d. Ordnung: $c^1(x)$ mit $u(x)$ subst.

Nochmal Extrema mit Nebenbedingung:



Maximal soll werden:
Flächeninhalt $2A\cdot 2B = \underline{4AB}$
bzw. $F_0 = AB$

unter Nebenbedingung: Punkt (A,B) auf Ellipse

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = 1$$

d.h. $\Phi(A,B) = \dfrac{A^2}{a^2} + \dfrac{B^2}{b^2} = 1$

① $\dfrac{\partial F_0}{\partial A} + \lambda \cdot \dfrac{\partial \phi}{\partial A} = 0 = B + \lambda \cdot \dfrac{2A}{a^2}$

② $\dfrac{\partial F_0}{\partial B} + \lambda \cdot \dfrac{\partial \phi}{\partial B} = 0 = A + \lambda \cdot \dfrac{2B}{b^2}$

③ $\dfrac{A^2}{a^2} + \dfrac{B^2}{b^2} = 1$

(1) u. (2) nach $-\lambda$:

$$\frac{A b^2}{2B} = -\lambda = \frac{B a^2}{2A} \quad \Big| \cdot 2AB$$

$$A^2 b^2 = B^2 a^2 \longrightarrow \frac{A^2}{a^2} = \frac{B^2}{b^2}$$

$$\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} = 1 \longrightarrow \frac{2B^2}{b^2} = 1 \rightarrow B = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} b$$

$$A = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$\Rightarrow 4AB = F(A,B) = 4\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{4} ab = \underline{\underline{2ab}}$$

Reihen, Summen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{n!} = a^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!} = a^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{a}(e^a - 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(ian)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{ian}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{ia})^n}{n!} = e^{e^{ia}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp(in\frac{\pi}{2})\pi^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{i\frac{\pi}{2}})^n \pi^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i)^n \pi^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i)^{n-1}\pi^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n\pi^n}{n!} = \frac{1}{i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i\pi^n}{n!} - 1\right) = \frac{1}{i}\left(e^{i\pi} - 1\right)$$

$$\frac{1}{i}(-2) = -\frac{2}{i} = \underline{2i}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\binom{n}{n-2}\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n}{(n-2)!} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+2}}{n!}$$

$$= \frac{1}{2}t^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{2}t^2\cdot e^t \qquad \boxed{\binom{n}{n-2}\cdot\frac{1}{n!} = \frac{n!}{(n-2)!\,2!\,n!} = \frac{1}{2}\frac{1}{(n-2)!}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!} = t\cdot e^t$$

Die Matrix e^{At}

$$B = C + I$$

$C^n = 0 \;\forall\; n \geq 3$

gesucht: e^{tB}

$$B^n = (C+I)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} C^n = I + nC + \binom{n}{2} C^2 + \cancel{\binom{n}{3} C^3}_{=0}$$

$$\underbrace{B^n = I + nC + \binom{n}{2} C^2}$$

$$e^{Bt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Bt)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B^n$$

$$e^{Bt} = I + \underbrace{tB}_{=tI+tC} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\left(I + nC + \binom{n}{2} C^2\right)$$

$$e^{Bt} = I + tI + tC + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n!} I + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n!} nC + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \binom{n}{2} C^2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \qquad + \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!}$$

$$\boxed{\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n-1)\cdot n}{2}}$$

$m = n-1$
$n = m+1$

$$e^t \cdot I \qquad tC \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \qquad \frac{C^2}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{(n-2)!}$$

$m = n-2$
$n = m+2$

$$\frac{t^2 C^2}{2} e^t$$

$$\Rightarrow e^{Bt} = e^t\left(I + tC + \frac{t^2 C^2}{2}\right)$$

Ausgerechnet:

$$e^{tB} = e^t\left(I + t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}t^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Dgl-Systeme:

$$e^{tB} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3t & 1 & 0 \\ (\frac{9}{2}t^2+t) & 3t & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}(t) = e^{tB}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(Fundamentalmatrix)

$$\text{Lösung } \vec{r}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3t & 1 & 0 \\ (\frac{9}{2}t^2+t) & 3t & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 3t+2 \\ \frac{9}{2}t^2 + \underbrace{t + 6t}_{7t} + 3 \end{pmatrix}$$

Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}\{g(t)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

$$\mathcal{F}\{A(t) \cdot \delta(t+2)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \cdot \delta(t+2)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0)\, dt = f(t_0) \qquad \text{hier: } t_0 = -2$$

$$\Rightarrow \; = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A(-2)\, e^{2i\omega}$$

← einfach t_0 einsetzen
$\int \delta(t - t_0)$ = Funktionswert an der Stelle t_0!

B^{-1} berechnen:

$$B = I + C$$

$$B^{-1} = \frac{1}{I+C} = I - C + C^2 \cancel{- C^3}_{=0}$$

$$B^{-1} = I - C + C^2$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 8 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix e^{At} mit Ansatz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 11 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = a_0 \cdot I + a_1 A + a_2 A^2$$

1 EW berechnen:

$\boxed{\lambda = 1}$ 3 fach — für x

$$\left.\begin{aligned} e^{xt} &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ t e^{xt} &= a_1 + 2a_2 x \\ t^2 e^{xt} &= 2a_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} e^t &= a_0 + a_1 + a_2 \\ t \cdot e^t &= a_1 + 2a_2 \\ t^2 \cdot e^t &= 2a_2 \end{aligned}$$

2 Matrix aufstellen und lösen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ te^t \\ t^2 e^t \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t(1 + t - \frac{1}{2}t^2) \\ e^t(t - t^2) \\ e^t(\frac{t^2}{2}) \end{pmatrix}$$

3 Lösung:

$$e^{At} = e^t\left((1 + t - \tfrac{1}{2}t^2) \cdot I + (t - t^2) \cdot A + \left(\frac{t^2}{2}\right) \cdot A^2\right)$$

Vektor- und Skalarfelder:

$$\Phi(x,y) = x^2 y + 2y^2 \qquad \vec{\nabla}\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{dx} \\ \frac{\partial \Phi}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + 4y \end{pmatrix}$$

$$d\Phi = \Phi_x\, dx + \Phi_y\, dy = 2xy\, dx + (x^2 + 4y)\, dy$$

$$\text{rot grad } \Phi = \vec{0}$$

$$\text{div grad } \Phi = \vec{\nabla} \bullet \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + 4y \end{pmatrix} = (2y) + (4) = 2y + 4$$

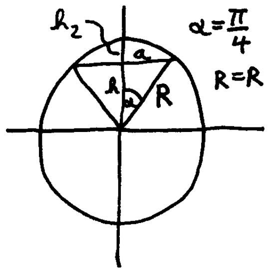
(Skalarprodukt aus ∇ und $\vec{F}$)

Richtungsableitungen:

An der Stelle $(1,-3)$ die Abl. Φ in Richtung des Vektors $(2,1)$

$$\frac{\partial \Phi(1,-3)}{\partial (2,1)} = \text{grad } \Phi(1,-3) \cdot \frac{(2,1)}{|(2,1)|} = \frac{\begin{pmatrix} -6 \\ -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} = -\frac{23}{\sqrt{5}}$$

Bereichsintegrale, Kugelkappe:



$\alpha = \frac{\pi}{4}$

$R = R$

$\sin\alpha = \frac{a}{R} \rightarrow a = R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\varphi = \frac{h}{R} \rightarrow h = R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

Pol Koord.

$x = r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\vartheta$

$y = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta$

$z = r \cdot \cos\vartheta$

$dV = r^2 \cdot \sin\vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta$

$$V_{Kugel} = \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} r^2 \cdot \sin\vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$= \left[-\cos\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} r^3\right]_0^R$$

$$= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3} R^3$$

$$= \frac{(1-\sqrt{2})}{2} \cdot \frac{2}{3} \pi R^3$$

$$V_{Kegel} = \frac{1}{3} G h = \frac{1}{3} \pi a^2 \cdot h$$

$$= \frac{1}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} R\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

$$= \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{1}{2} R^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12} \pi R^3$$

$$V_{Kappe} = V_{Kugel} - V_{Kegel} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3} \pi R^3 - \frac{\sqrt{2}}{16} \pi R^3$$

$$= \pi R^3 \left(\frac{(1-\sqrt{2})}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{16}\right) = \pi R^3 \left(\frac{16 - 13\sqrt{2}}{48}\right)$$

Höhe der Kappe: $h_2 = R - h$

Unbekannte Aufgabe:

U unitär $\rightarrow U^+ = U^{-1}$ U erhält Längen

$U: \vec{a} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|a\| = |a| = \underline{\underline{5}}$

$U: \vec{b} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{b}\| = |b| = \underline{\underline{10}}$

$U^{-1}: \vec{e}_y \rightarrow \frac{\pm\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \quad e_z \rightarrow \frac{\pm\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$

d.h. $U^+ = \begin{pmatrix} x & \pm\frac{3}{5} & \pm\frac{4}{5} \\ y & 0 & 0 \\ z & \pm\frac{4}{5} & \pm\frac{3}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underline{\underline{U = (U^+)^{-1}}}$

Majorantenkriterium:

① $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ist endlich

② $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$\boxed{\text{Falls } |a_n| \leq |b_n| \text{ konvergiert ② auch!}}$

z.B.: $\left|\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{-n} \cdot \cos(nw)\right)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2 \Rightarrow$ konvergiert!

Wurzelkriterium:

Falls $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$, dann konvergiert die Reihe!

z.B.: $a_n = 2^{-n}$ $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ konvergiert!

Quotientenkriterium:

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, dann konvergiert die Reihe!

z.B.: $a_n = 2^{-n}$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{2}{3} < 1$

$\Rightarrow$ konvergiert!